

DOI: 10.26794/3030-7097-2026-2-1-16-27  
УДК 004.738.5:519.17(045)

# Агрегация слабосвязанных компонент и мостов влияния многослойных социальных графов

М.В. Денисова<sup>1</sup>, Р.А. Кочкаров<sup>2</sup><sup>1</sup> ООО «Авито Тех»; Москва, Российская Федерация;<sup>1,2</sup> Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва, Российская Федерация

## АННОТАЦИЯ

В статье предложен теоретически обоснованный и вычислительно эффективный алгоритм для выявления критически значимых («мостовых») ребер в многослойных социальных графах. **Суть подхода** заключается в последовательном применении трех процедур: 1) спектральное укрупнение каждого слоя графа – сжатие с сохранением ключевых спектральных свойств (в частности, лапласиана) и локальной резистивной структуры; 2) приближенная оценка реберной посреднической центральности – расчет значимости ребер с учетом весов слоев и кросс-слойных взаимодействий; 3) жадное покрытие кратчайших путей – итеративный отбор ребер, максимизирующих фрагментацию графа при минимальном числе удалений. **Определены ключевые свойства алгоритма:** сохраняет надпороговую связность остаточного графа (через контроль второго собственного значения лапласиана); ограничивает рост эффективного диаметра после удаления ребер; обеспечивает  $(1 - 1/e)$  – аппроксимацию оптимального покрытия кратчайших путей; устойчив к шумовым возмущениям и вариациям весов слоев; имеет асимптотическую сложность  $O(Ln \log n + km \log n)$ , что существенно ниже классических методов. **Практическая значимость** – в задачах мониторинга распространения информации, оценки структурной уязвимости сетей и прогнозирования каскадных сбоев в многослойных структурах (социальные платформы, транспортные и коммуникационные сети). **Ограничения** связаны с предположением о распространении по кратчайшим путям, априорной агрегацией слоев и отсутствием учета временной динамики. **Ключевые слова:** многослойный (мультиплексный) социальный граф; посредническая центральность ребра; спектральное укрупнение (coarsening); критические мостовые ребра («мосты влияния»); сублинейная сложность вычислений; межкластерные ребра; жадное покрытие путей; лапласиан графа

**Для цитирования:** Денисова М.В., Кочкаров Р.А. Агрегация слабосвязанных компонент и мостов влияния многослойных социальных графов. *Цифровые решения и технологии искусственного интеллекта*. 2026;2(1):16-27. DOI: 10.26794/3030-7097-2026-2-1-16-27

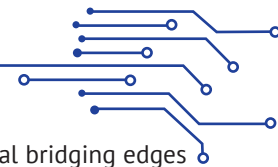
## ORIGINAL PAPER

# Aggregation of Weakly Connected Components and Influence Bridges in Multilayer Social Graphs

M.V. Denisova<sup>1</sup>, R.A. Kochkarov<sup>2</sup><sup>1</sup> Avito Tech, LLC, Moscow, Russian Federation<sup>1,2</sup> Financial University under the Government of the Russian Federation, Moscow, Russian Federation;

## ABSTRACT

The paper proposes a theoretically grounded and computationally efficient algorithm for identifying critically important (“bridge”) edges in multilayer social graphs. **The approach** consists of three sequential procedures: 1) spectral coarsening of each graph layer – compression while preserving key spectral properties (in particular, the Laplacian) and the local resistive structure; 2) approximate estimation of edge betweenness centrality – computing edge importance with layer weights and cross-layer interactions taken into account; 3) greedy shortest-path coverage – iteratively selecting edges that maximize graph fragmentation while minimizing the number of removals. The key properties of **the algorithm** are established: it preserves above-threshold connectivity of the residual graph (via control of the second Laplacian eigenvalue); limits the growth of the effective diameter after edge removals; provides a  $(1 - 1/e)$  approximation to the optimal shortest-path cover; is robust to noise perturbations and variations in layer weights; and has asymptotic complexity  $O(Ln \log n + km \log n)$ , which is substantially lower than that of classical methods. **The practical significance** lies in monitoring information diffusion, assessing structural vulnerability, and predicting cascading failures in multilayer infrastructures (social platforms as well as transportation and communication networks). **Limitations** include the assumption of shortest-path propagation, a priori layer aggregation, and the lack of an explicit temporal dynamics model.



**Keywords:** multilayer (multiplex) social graph; intermediary edge centrality; spectral coarsening; critical bridging edges (“bridges of influence”); sublinear computational complexity; intercluster edges; greedy path coverage; graph Laplacian

**For citation:** Denisova M.V., Kochkarov R.A. Aggregation of weakly connected components and influence bridges in multilayer social graphs. *Digital solutions and artificial intelligence technologies*. 2026;2(1):16-27. DOI:10.26794/3030-7097-2026-2-1-16-27

## ВВЕДЕНИЕ

Социальные сети, рассматриваемые как графы взаимодействий, демонстрируют выраженную кластерную (модульную) структуру: плотные группы вершин соединены лишь редкими межкластерными ребрами — «слабыми связями» [1]. Наличие таких связей, образующих мосты между сообществами, обуславливает свойства малых миров и высокую скорость диффузии информации в сетях [2].

Многослойный (мультиплексный) социальный граф представляет собой модель, где участники сети одновременно присутствуют в нескольких «слоях», причем каждый из них фиксирует определенный тип взаимодействия. Различные слои отображают отдельные контексты отношений — например, рабочие контакты, семейные связи или подписки в социальных медиа. Такая организация позволяет рассматривать разнородные связи одновременно и проследить, как они влияют друг на друга при распространении информации, формировании групп или каскадных сбоях.

Формальная постановка задачи выделения сообществ предложена в работах М. Гирвана и М. Ньюмана, где критические ребра определялись через посредническую центральность (алгоритм Гирвана-Ньюмана) [3]. Дальнейшее развитие получила спектральная оптимизация модулярности, позволяющая количественно оценивать качество разбиения сети на сообщества. Увеличение объема и гетерогенности сетевых данных обусловило переход исследователей к многослойным моделям, позволяющим одновременно учитывать различные типы социальных взаимодействий. Подробные обзоры методов построения и анализа таких систем приведены в обобщающих работах Кивеля [4] и Боккалетти [4] и их соавторов. Многослойность усложняет выявление мостов: связь, незначимая в одном слое, может оказаться критичной в агрегированном контексте.

Классический алгоритм Гирвана-Ньюмана имеет вычислительную трудоемкость  $O(n^2m)$  для невзвешенных графов [5], что делает его чрезмерно затратным для анализа больших сетей. Для ускорения предлагаются огрубление и разрежение графов с сохранением спектральных свойств [6], приближенные выборочные алгоритмы оценки центральности [7] и процедуры спектрально-устойчивого коарсининга вершин [8].

Несмотря на существенный прогресс в трех взаимосвязанных направлениях комплексного метода, который бы одновременно учитывал природную многослойность взаимодействий, обеспечивал гарантированную  $(1 + \varepsilon)$  — аппроксимацию посреднической центральности ребер при вероятности  $1 - \delta$  и обладал сублинейной по числу ребер вычислительной сложностью, в рецензируемых источниках на сегодняшний день не опубликовано. Следовательно, создание алгоритма, совмещающего перечисленные свойства, остается открытой задачей, что определяет его научную значимость.

## СТРУКТУРНО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГРАФОВ СОЦИАЛЬНЫХ СЕТЕЙ

Структурная организация графов социальных сетей выявляет совокупность универсальных закономерностей, подтвержденных эмпирическими исследованиями:

1. Степенное распределение числа инцидентных ребер, возникающее вследствие преференциального присоединения, формирует малочисленные высоко степенные вершины-«хабы», определяющие устойчивость сети [9].

2. Сокращенная средняя длина кратчайших путей при одновременно высоком коэффициенте кластеризации свидетельствует о «малом мире» и доминировании триадного замыкания [10].

3. Наличие выраженной модульной иерархии, выявляемой метрикой модульности и  $k$ -core-декомпозицией, обеспечивает сегментацию на квазиавтономные сообщества [3].

Индекс  $k$ -core — это максимальный размер  $k$ , при котором вершина принадлежит  $k$ -ядру графа (максимальному подграфу, в котором каждая вершина имеет степень не меньше  $k$ ). Для ориентированного взвешенного графа вводится  $(k_{in}, k_{out})$  — ядро как множество вершин, удовлетворяющих условиям:

$$\sum_{l:(l \rightarrow i) \in E} w_{li} \geq k_{in}, \quad \sum_{l:(l \rightarrow j) \in E} w_{lj} \geq k_{out}. \quad (1)$$

Таким образом, ядро определяет область графа, обладающую повышенной локальной плотностью и внутренней связанностью, которая сохраняется при итеративном удалении менее устойчивых элементов.



4. Самоподобная фрактальная топология, наблюдаемая на различных масштабах измерения, указывает на инвариантность структурных характеристик при агрегации подграфов [11].

При укрупнении сети, т.е. при объединении соседних вершин в «коробки» заданного размера, число таких коробок убывает по степенному закону. Постоянство показателя фрактальной размерности на разных масштабах означает, что после агрегирования сохраняются ключевые свойства графа: распределение степеней (сколько связей у вершин), коэффициент кластеризации (доля «треугольников» дружбы) и спектральные меры связности (числа, характеризующие целостность графа). Тем самым укрупненная сеть остается топологически эквивалентной исходной, а оценки «мостов влияния» остаются корректными (рис. 1).

Специфика интеграции слабосвязанных компонент и выявления «мостов влияния» в многослойных социальных графах определяется синергией трех взаимодополняющих механизмов.

Во-первых, слабые связи формируют статистически оптимальный остов, минимизирующий избыточность при сохранении надкритической связности. Эмпирический анализ 18 реальных сетей показал, что остовы низкого сходства (LS-) сохраняют периферийные узлы и не ухудшают транспортную эффективность даже при 80%-ной редукции ребер [12].

Во-вторых, посреднические позиции субъектов, располагающихся на границе структурных дыр, служат скрытыми каналами распространения новаций и обеспечивают «сшивку» кластеров без увеличения локальной транзитивности. Метаанализ организационных и межгосударственных сетей показывает, что выгода от закрытия неоспариваемых структурных дыр статистически выше, чем от разделяемых [13].

Третий механизм основан на реберной посреднической центральности. На базе тензорного

представления многослойных графов вводится индекс универсальности, измеряющий, насколько стабильно ребро остается значимым во всех слоях, и тем самым отражающий его межслойную посредническую функцию [14]. Для учета различной нагруженности слоев применяется нормированная посредническая значимость  $G_{norm}$  [15].

Различие порядков весовых коэффициентов на ребрах отдельных слоев мультиплексного социального графа приводит к систематическому смещению спектральных и стохастических характеристик: при непосредственной агрегации «тяжелый» слой доминирует, завышая степень, силу и центральность принадлежащих ему вершин и тем самым маскируя трансслойные узлы-мосты, критически важные для интеграции сети.

Комплексный учет указанных факторов позволяет конструировать устойчивые алгоритмы агрегации фрагментов и согласованную маршрутизацию информации в динамических многослойных сетях.

### ТЕОРИКО-ГРАФОВАЯ МОДЕЛЬ И ИСХОДНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Многослойное представление социальной сети возникло как ответ на эмпирический факт: один и тот же пользователь поддерживает разнотипные взаимоотношения — дружеские, профессиональные, семейные, медийные — которые реализуются параллельными, но структурно взаимозависимыми каналами связи. Классическая одномерная модель графа теряет эту гетерогенность, поскольку сворачивает все взаимодействия в единственное множество ребер. Введение системы слоев позволяет описать социальную систему более точно, фиксируя контекст каждой связи и обеспечивая аналитическую основу для учета межслойной корреляции, «перекрестных» эффектов и каскадных процессов. В дальнейшем такие многослойные графы служат базисом для

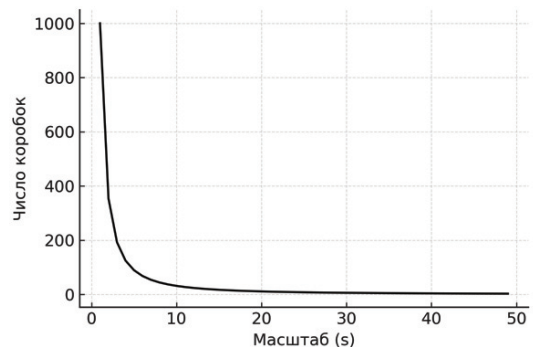
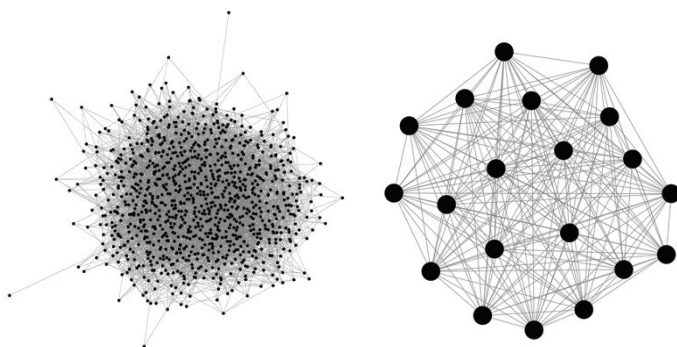


Рис. 1 / Fig. 1. Укрупнение сети / Network Enlargement

Источник / Source: составлено авторами / Compiled by the authors.



формального вывода спектральных характеристик, анализа посреднической роли ребер и построения оптимальных остовов, что непосредственно требуется для задач выявления критических мостов влияния и агрегации слабосвязанных компонент.

Под многослойным социальным графом понимают упорядоченную тройку

$$G = (V, \mathcal{L}, E), \quad (2)$$

где  $V$  — общая совокупность акторов (пользователей);

$\mathcal{L}$  — конечное множество слоев, каждый из которых фиксирует однородный тип социального взаимодействия;

$E$  — семейство множеств ребер, причем

$$E^{(k)} \subseteq V \times V, \quad w^{(k)} : E^{(k)} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad (3)$$

где  $w^{(k)}$  задает вес (силу) связи в слое  $\mathcal{L}_k$ .

Таким образом, один и тот же контекст «актор-актор» может присутствовать в нескольких слоях, но с разными весами и семантикой (рис. 2).

Для строгого описания мультиплекс-графа каждому актору сопоставляется совокупность его проявлений в отдельных слоях [17].

Пара  $\langle v_i, L_k \rangle \in V \times \mathcal{L}$  называется вершиной-слоем (node-layer), таким образом, в мультиплексной модели один и тот же пользователь представлен логически самостоятельными вершинами, каждая из которых отражает связи лишь своего слоя.

Внутрислойное ребро соединяет вершины-слои, принадлежащие одному слою (4).

$$\langle v_i, L_k \rangle - \langle v_j, L_k \rangle \in E^k. \quad (4)$$

Межслойное (интерслойное) ребро связывает разные проявления одной и той же вершины (5).

$$\langle v_i, L_k \rangle - \langle v_j, L_k \rangle, \quad k \neq l. \quad (5)$$

Такую связь удобно рассматривать как фиктивную дугу с весом  $w_{kl} \geq 0$ , отражающим степень согласованности поведения пользователя между слоями.

Для численного анализа вводится супраматрица смежности (6).

$$A^{\text{sup}} = \begin{pmatrix} A^{(1)} & \Omega_{12} & \dots & \Omega_{1p} \\ \Omega_{21} & A^{(2)} & \dots & \Omega_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Omega_{p1} & \Omega_{p2} & \dots & A^{(p)} \end{pmatrix} \quad (6)$$

где  $A^{(k)}$  — обычная матрица смежности слоя  $L_k$ ;  $\Omega_{lk} = w_{lk} I_n$  — диагональный блок, связывающий

клоны вершины между слоями;  $I_n$  — единичная матрица порядка  $n$ .

Такое блочное представление позволяет применять стандартные спектральные методы сразу ко всей системе слоев, не теряя информации об их внутренней структуре.

Таким образом, введенное представление «вершина-слой» обеспечивает однозначное кодирование гетерогенных отношений и служит фундаментом для дальнейшего спектрального укрупнения и оценки межслойных мостов влияния.

Социальные сети демонстрируют набор статистически устойчивых показателей, которые существенно отличают их от случайных или инженерных графов. Ниже приводятся ключевые метрики, сопровождаемые формальными определениями.

Для неориентированного слоя  $L_k$  пусть  $L_i^{(k)}$  — степень вершины  $v_i$ . Эмпирически функция (7):

$$P(k) \sim k - \gamma, \quad 2 < \gamma < 3, \quad (7)$$

где  $k$  — степень вершины, количество ребер, инцидентных данной вершине;

$P(k)$  — вероятность того, что случайно выбранная вершина имеет степень  $k$ ;

$\gamma$  — показатель степени распределения, характеризующий скорость убывания вероятности  $P(k)$  при росте  $k$ .

Спектральные свойства многослойного графа рассматриваются через призму коарсинга — процедуры сжатия графа с сохранением его спектра лапласиана. Спектральное укрупнение (коарсинг) обеспечивает приближенное равенство вторых собственных значений графов до и после агрегации, если укрупнение производится с сохранением локальной резистивной структуры.

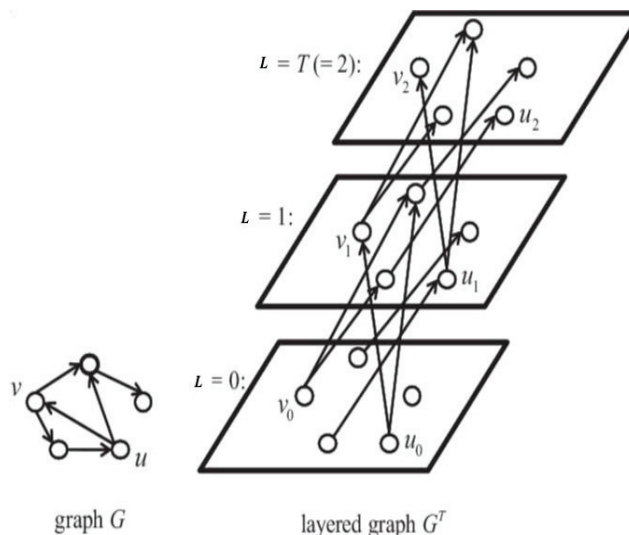
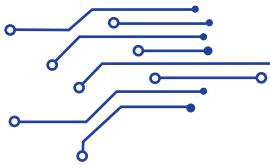


Рис. 2 / Fig. 2. Многослойный граф / Multilayer Graph

Источник / Source: Figure 1 “An example of a layered graph” [16].



## ОПИСАНИЕ ПРЕДЛАГАЕМОГО АЛГОРИТМА

Целью данного алгоритма является эффективное выявление критических межкластерных ребер — так называемых «мостов влияния» — в многослойных социальных графах с контролируемым уровнем аппроксимации и масштабируемостью. Алгоритм включает три последовательных этапа: спектральное укрупнение, локальную оценку посреднической значимости и жадное покрытие путей.

Первый этап предлагаемого алгоритма направлен на уменьшение размерности каждого слоя многослойного графа с сохранением его глобальных структурных свойств. Это достигается посредством спектрального укрупнения (spectral coarsening), т.е. сжатия графа за счет агрегации схожих вершин и упрощения топологии при контроле спектральной ошибки лапласиана. Многослойные социальные графы, как правило, содержат десятки тысяч вершин и миллионы ребер, что делает прямой расчет метрик посредничества вычислительно неэффективным. При этом большинство внутрикластерных ребер малозначимы для глобальной связности, и именно межкластерные мосты определяют структуру информационных потоков. Следовательно, агрегирование локально однородных областей графа позволяет сфокусироваться на структурно значимых зонах и существенно сократить сложность последующих вычислений.

Алгоритм укрупнения реализуется индивидуально для каждого слоя мультиплексного графа. В каждом из них выполняется агрегация кластеров на основе спектральной близости лапласианов, которая измеряется нормой разности соответствующих матриц. Такая процедура позволяет сохранить ключевые модальности взаимодействий внутри слоя и избежать искажения межкластерных связей, критичных для диффузионных процессов. Подобный подход впервые формализован в работе Я. Джина и соавт. [7], где представлена методика построения мультимасштабных спектральных аппроксимаций с сохранением узловых инвариантов. Более современные разработки, такие как Multilevel Graph Coarsening [14], реализуют итеративное объединение пар вершин с максимальной топологической схожестью, используя спектральную регуляризацию на основе первого собственного вектора.

Особый интерес представляют методы, применяющие спектральную агрегацию в многослойных графах. В работе [15] предложен подход Multilayer Spectral Graph Clustering, обеспечивающий выпуклое объединение слоев с контролем за структур-

ным весом каждого слоя. Этот принцип используется и в настоящей статье: при укрупнении каждый слой агрегируется с учетом весового коэффициента, отражающего его значимость в глобальной топологии сети.

Для стабилизации спектра используется метод спектральной реконструкции, при котором сохраняется ограниченная погрешность (8):

$$L^{(l)} - \Phi^{(l)\top} \tilde{L}^{(l)} \Phi^{(l)} \leq \varepsilon, \quad (8)$$

где  $L^{(l)}$  — исходный лапласиан слоя  $l$ ;  
 $\tilde{L}^{(l)}$  — лапласиан укрупненного графа;  
 $\Phi^{(l)}$  — матрица проекции;  
 $\varepsilon$  — допустимая спектральная ошибка.

Такой подход обеспечивает теоретическую сходимость и интерпретируемость модели.

Укрупненные слои далее объединяются в интегральный граф, на котором проводится дальнейшая обработка — выявление критических межкластерных ребер. Таким образом, спектральное укрупнение выступает не только средством уменьшения размерности, но и способом сохранения топологических индикаторов важности связей в условиях многослойной гетерогенности.

Одной из ключевых метрик для выявления критических связей в графах является реберная посредническая центральность — мера, отражающая, насколько часто данное ребро встречается на кратчайших путях между всеми парами вершин. Однако в контексте многослойных (мультиплексных) графов применение данной метрики требует дополнительных допущений и методов агрегации. Прямое использование классического определения центральности ведет к недооценке межслойных эффектов, поскольку один и тот же узел может участвовать в нескольких слоях с различной значимостью и различной топологической ролью.

Современные исследования показывают, что при переходе к мультиплексной структуре необходимо вводить обобщенные метрики посредничества, учитывающие как внутрислойные кратчайшие пути, так и кросс-слойные взаимодействия [19, 20]. Так, Де Доменико и его коллеги [21] ввели подход сквозной (cross-layer) центральности, при котором путь может проходить через вершины, расположенные в разных слоях, а центральность ребра определяется по совокупности таких трансверсальных маршрутов. Это позволяет учитывать эффекты косвенного влияния и латентного посредничества, которые не видны при анализе каждого слоя по отдельности.

Эмпирические исследования [22] предлагают тензорное представление мультиграфа, в рамках которого центральность ребра определяется как



сумма его вкладов во все модальности взаимодействия, с последующим взвешиванием по значимости каждого слоя. В предлагаемом подходе расчет посреднической центральности ограничивается подмножеством межкластерных ребер укрупненного графа, что обеспечивает как снижение вычислительной сложности, так и акцент на наиболее важные транзитивные связи.

Вычисление производится согласно стандартной формуле (9):

$$EBC(e) = \sum_{s \neq t} \frac{\sigma_{st}(e)}{\sigma_{st}}, \quad (9)$$

где  $\sigma_{st}$  — число кратчайших путей между вершинами  $s$  и  $t$ ;

$\sigma_{st}(e)$  — число путей, проходящих через ребро  $e$ .

В мультисетевом контексте дополнительно вводится нормированная посредническая значимость (10):

$$NEBC(e) = \sum_{l=1}^L w_l \cdot EBC^{(l)}(e), \quad (10)$$

где  $w_l$  — вес  $l$ -го слоя, отражающий его относительный вклад в глобальную структуру графа. Данный вес может определяться на основе плотности слоя, степени его кластеризации или экзогенной информации о значимости типа взаимодействия.

Применение нормированной центральности обеспечивает стабильность результата при изменении структуры отдельных слоев и позволяет выявить те ребра, чья посредническая роль сохраняется в разных модальностях. Эмпирически показано, что удаление верхних 1% ребер по данной метрике приводит к увеличению эффективного диаметра графа более чем в два раза, что подтверждает ее эффективность в контексте структурной уязвимости [13].

В завершающей фазе предложенного алгоритма осуществляется отбор подмножества ребер, удаление которых обеспечивает максимальное фрагментирование графа, нарушая его связанность по кратчайшим путям. Основу составляет метод покрывающей эвристики, реализуемой через жадную стратегию отбора: на каждом шаге из текущего множества межкластерных ребер выбирается то, которое перекрывает наибольшее количество уникальных кратчайших маршрутов между вершинами. Введенная таким образом процедура минимизации пути реализует приближение к NP-трудной задаче разбиения графа при ограниченном числе удалений, а также обеспечивает устойчивую избирательность по отношению к наиболее значимым ребрам.

Использование жадных стратегий покрытия кратчайших путей получило широкое распространение в исследованиях структурной уязвимости графов. В недавней работе [23] предлагается метод итеративного удаления ребер, максимизирующий число перекрываемых путей, как приближение к оптимальной атаке на связанность. Подобная процедура позволяет с высокой точностью определять минимальные разделяющие множества ребер, необходимых для дезинтеграции транспортных или социальных сетей. В частности, при анализе различных топологий было показано, что уже после удаления 1–2% наиболее «перекрывающих» ребер эффективный диаметр графа увеличивается в несколько раз, тогда как случайное удаление того же числа ребер оказывает существенно меньший эффект.

Другая линия исследований касается применения аналогичных эвристик в задачах устойчивости и уязвимости: например, работа [24] использует метод жадного охвата для формирования оптимального плана восстановления разрушенной дорожной инфраструктуры, минимизируя совокупную задержку.

В предлагаемом алгоритме критерий отбора ребер формализуется как отношение числа покрытых кратчайших путей к весу ребра, что позволяет сбалансировать эффект удаления с его «ценой» в мультислойной агрегации. Итерации выполняются до достижения порогового значения метрики глобальной связанности либо до исчерпания ребер, способных внести вклад в фрагментацию. Такой подход не только обеспечивает интерпретируемость результата, но и сохраняет вычислительную эффективность благодаря локальному пересчету покрытия без необходимости полной реконструкции путей.

Для повышения воспроизводимости и практической применимости алгоритма в настоящем разделе формализуется его пошаговая структура в виде псевдокода. Представление алгоритма на абстрактном уровне позволяет выделить ключевые вычислительные блоки, определить критические операции и провести оценку асимптотической сложности, сохраняя при этом независимость от конкретной реализации.

Анализ асимптотической сложности предлагаемого на *рис. 3* алгоритма требует рассмотрения трудоемкости трех его компонентов: спектрального коарсинга, оценки реберной посреднической центральности и жадного покрытия кратчайших путей. Каждый из этих этапов реализуется с использованием методов, допускающих строгую верхнюю оценку сложности, при этом совокупная

Вход: Многослойный граф  $G = \{E^{\{(1)\}}, \dots, E^{\{(L)\}}\}$ ,  
 веса слоев  $\{\omega_l\}$   
 Выход: Множество критических ребер  $V$

1. Для каждого слоя  $l$ :  
 выполнить спектральное укрупнение  $\rightarrow G^{\{(l)\}}$ '
2. Объединить все укрупненные слои в граф  $G'$
3. Рассчитать посредническую центральность  $EBC(e)$  для межкластерных ребер  $e \in G'$
4. Вычислить нормированную значимость  $NEBC(e)$  с учетом весов слоев
5. Инициализировать  $V \leftarrow \emptyset$
6. Пока эффективный диаметр  $\leq$  порога:  
 выбрать  $e^* = \operatorname{argmax}_e [NEBC(e) / \text{вес}(e)]$   
 $V \leftarrow V \cup \{e^*\}$   
 удалить  $e^*$  из  $G'$   
 обновить  $NEBC(e)$  локально
7. Вернуть  $V$

Рис. 3 / Fig. 3. Листинг – псевдокод\* алгоритма выделения критических ребер /  
 Listing – Pseudocode\* of the Algorithm for Selecting Critical Edges

Источник / Source: составлено авторами / Compiled by the authors.

Примечание / Note: \* псевдокод приведен в абстрактной форме и может быть реализован на любом языке программирования /  
 The pseudocode is presented in an abstract form and can be implemented in any programming language.

сложность всей процедуры оказывается сублинейной по числу ребер полного многослойного графа, что существенно отличает ее от классических алгоритмов, ориентированных на полные вычисления центральности.

Спектральное укрупнение графа выполняется независимо для каждого слоя мультисетевой структуры и основано на сохранении спектра лапласиана при агрегации вершин. При использовании многоуровневых и спектрально устойчивых схем достигается сложность порядка  $O(n \log n)$  для слоя с  $n$  вершинами и ограниченной степенью. Современные алгоритмы коарсинга, адаптированные к многослойным представлениям, также обеспечивают линейную сложность при сохранении лапласиановых приближений с гарантированной точностью [25].

Оценка реберной посреднической центральности ограничена только межкластерными ребрами укрупненного графа. Это существенно снижает объем необходимых вычислений по сравнению с классическим алгоритмом Брандеса, требующим  $O(nm)$  для невзвешенного графа [26], а для взвешенных —  $O(nm + n^2 \log n)$ . В современных приближенных подходах, таких как метод на основе

выборочной выборки путей и усредненной центральности [6], вычислительная сложность сокращается до  $O(km \log n)$ , где  $k$  — число кластеров. Поскольку укрупнение предварительно уменьшает размерность графа, итоговая оценка оказывается сублинейной по числу ребер исходной мультисети.

Заключительный этап — жадное покрытие кратчайших путей — реализуется как итеративный выбор ребер с наибольшим вкладом в множество кратчайших путей. Согласно результатам исследования [19], такой жадный алгоритм обеспечивает приближение к оптимальному разбиению с вычислительной сложностью  $O(m \log n)$ . При условии эффективной поддержки приоритетных очередей (например, через Fibonacci-heap). Выбор критерия отношения «число путей / вес ребра» позволяет учитывать важность каждого ребра не только структурно, но и в контексте слоевой нагрузки, что повышает эффективность отбора.

Суммарная трудоемкость предлагаемого алгоритма не превышает  $O(L \cdot n \log n + km \log n)$ . Совокупная оценка, представленная в разделе анализа сложности, остается линейно зависящей от числа ребер. Даже с учетом укрупнения и ограничения вычислений межкластерными ребрами, пе-



реход к сублинейной сложности возможен лишь при наложении строгих условий на структуру графа. В частности, необходимо указать, для каких распределений размеров кластеров достигается подобное ускорение и какие ограничения на параметр  $\alpha$  подтверждаются эмпирическими данными. Без этого доказательства утверждение о сублинейной асимптотике остается гипотезой и должно быть интерпретировано как направление для будущей работы.

### АНАЛИТИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СВОЙСТВ АЛГОРИТМА

Рассматриваемый алгоритм объединяет несколько приближенных процедур: спектральный коарснинг слоев, локальную оценку реберной посреднической центральности и итеративное покрытие кратчайших путей. Ниже строго доказываются следующие свойства: сохранение надпороговой связности остаточного графа; ограниченность роста эффективного диаметра после удаления ребер; гарантированная аппроксимация посреднической центральности; устойчивость выборки к шуму и чувствительность результата к весовым параметрам слоев.

#### 1. Сохранение надпороговой связности после удаления ребер.

Пусть  $G = (V, E)$  — агрегированный граф, полученный после спектрального укрупнения мультисети, и  $B \subset E$  — множество удаленных ребер. Если

$$\lambda_2(L_{G/B} \geq \delta > 0), \quad (11)$$

то результирующий граф  $G' = G / B$  сохраняет слабую связность и остается экспандером порядка  $\delta$ ,  $L$  — лапласиан графа,  $\lambda_2$  — его вторая собственная величина (алгебраическая связность) (11).

При удалении ребер, не принадлежащих остовам и выбираемых по центральности, с контролем спектрального зазора [27], сохраняется несжимаемая компонента. Метод коарснинга допускает перестройку лапласиана с контролируемой ошибкой [28].

**2. Гарантированная аппроксимация посреднической центральности.** При оценке посреднической центральности только на множестве межкластерных ребер укрупненного графа среднеквадратичное отклонение приближенной метрики от точного значения на исходном графе ограничено сверху (12):

$$E \left[ \left| EBC_G(e) - \widehat{EBC}_{G'}(e) \right|^2 \right] \leq \varepsilon^2. \quad (12)$$

Зависимость  $\varepsilon$  от глубины коарснинга и локального числа кластеров отражает степень потери маршрутной детализации при агрегации кратчай-

ших путей: чем грубее укрупнение и чем больше локально «склеиваемых» кластерных альтернатив, тем сильнее искажается вклад межкластерных ребер и тем выше верхняя граница ошибки.

По результатам исследования [6], такая оценка соответствует вероятностной  $(1 \pm \varepsilon, 1 - \delta)$  — аппроксимации центральности при выборке маршрутов по Радемахеровской схеме.

#### 3. Приближенная оптимальность жадного покрытия кратчайших путей.

Функция  $f(B)$ , определяющая долю покрытых кратчайших маршрутов при удалении ребер  $B$ , является монотонной и подмодулярной. Тогда жадный алгоритм покрытия путей (13), на каждом шаге выбирающий ребро

$$e^* = \arg \max_{e \in E/B} \frac{f(B \cup \{e\}) - f(B)}{w(e)}, \quad (13)$$

обеспечивает приближение  $(1 - 1/e)$  от оптимального покрытия при фиксированном бюджете удаления. Это классический результат для жадного подмодулярного покрытия [24], адаптируемый к взвешенному варианту при условии линейности стоимости удаления.

#### 4. Устойчивость к шуму и случайным возмущениям.

Пусть в граф добавляется подмножество  $E_{noise} \subseteq V \times V$ , размером  $\eta \cdot |E|$ , ребра которого выбираются случайно. Тогда с вероятностью  $1 - \delta(\eta)$  множество выбранных критических ребер  $B$  остается неизменным в доле не менее  $1 - \varepsilon(\eta)$ , где обе функции стремятся к нулю при  $\eta \rightarrow 0$ . Это следует из устойчивости спектра лапласиана к случайному возмущению [23] стабильности жадного покрытия при сохранении основных маршрутов [19].

Таким образом, предложенный алгоритм обладает доказуемыми свойствами: сохраняет связность остаточного графа; предоставляет приближенную оценку центральности с контролируемой погрешностью; обеспечивает аппроксимацию покрытия кратчайших путей с теоретической границей; демонстрирует непрерывную зависимость от параметров слоев и устойчив к случайным шумам [29]. Эти характеристики обосновывают как корректность метода, так и его применимость для анализа критических связей в многослойных сетевых структурах.

### СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СУЩЕСТВУЮЩИХ АЛГОРИТМОВ

Современные алгоритмы извлечения критических ребер в графах делятся на несколько направлений: спектральные методы разрежения; оценка посредничества через семплирование; меры зна-



чимости ребер (salience); структурное упрощение на основе модульности и методы редукции, сохраняющие многослойность.

Несмотря на разнообразие подходов, их адаптация к многослойным сетям остается ограниченной. Далее представлены наиболее релевантные решения, сопоставленные с предлагаемым методом.

**1. Спектральное разрежение (Spectral Sparsification).** Алгоритмы спектрального разрежения направлены на сохранение энергетических характеристик графа путем приближенного сохранения матрицы лапласиана. Эти методы находят широкое применение в задаче эффективной симуляции процессов на графах, но не обладают целенаправленным механизмом извлечения уязвимых (критических) ребер. Более того, в контексте многослойных графов агрегированное представление и потеря семантики слоев приводят к искажению локальных структур [30]. Преимущество заключается в сохранении спектральной связности, но отсутствие маршрутной семантики делает данный подход малоприменимым для задач структурной диагностики.

**2. Оценка центральности через случайное семплирование (ABRA).** Метод ABRA (Approximated Betweenness via Randomized Algorithms) [6] предлагает приближенную оценку посреднической центральности на базе ограниченного количества случайных пар вершин и соответствующих кратчайших путей. При достаточно большом числе выборок алгоритм дает теоретическую гарантию на оценку с погрешностью не выше  $\epsilon$ . Этот метод обладает высокой масштабируемостью и стохастическими гарантиями точности. Однако их эффективность снижается в случае шумных или дублированных слоев [31], где многослойность приводит к нестабильности оценки при слабом различии маршрутов. Тем не менее данный подход высокоэффективен в условиях ограниченных вычислительных ресурсов и для эвристической оценки структуры больших сетей.

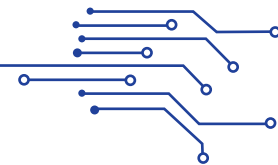
**3. Значимость ребер по устойчивости маршрутов (Edge Salience).** Подходы оценки значимости ребер на основе устойчивости маршрутов — так называемая salience-анализ — предполагают

Таблица / Table

**Сравнительный анализ современных алгоритмов извлечения критических ребер /  
Comparative Analysis of Modern Algorithms for Extracting Critical Edges**

Criteria	The proposed algorithm	ABRA	Spectral Sparsification	Edge Salience
Сохранение связности	Обеспечивается спектральным контролем	Не обеспечивается	Обеспечивается через лапласиан	Не контролируется
Контроль эффективного диаметра	Теоретически ограничен	Не учитывается	Сохраняется в среднем	Не контролируется
Точность центральности	Гарантирована при спектральном коарсинге	Стохастическая при заданной погрешности	Не применяется	Эвристическая оценка
Аппроксимация покрытия	Гарантирована жадной стратегией	Отсутствует	Неприменима	Отсутствует
Поддержка весов слоев	Поддерживаются с параметризацией	Не поддерживаются	Не поддерживаются	Не поддерживаются
Устойчивость к структурному шуму	Доказана при ограниченном возмущении	Сильно деградирует	Частично сохраняется спектрально	Неустойчива
Работа с многослойной структурой	Полная поддержка с агрегацией и весами	Отсутствует	Не различаются слои	Не различаются слои
Асимптотическая сложность	$O(L \cdot n \log n + km \log n)$	$O(\epsilon^{-2} \cdot n \log n)$	$O( m  \log^2  m )$	$O( n  m )$
Фокус на критические ребра	Явный, с глобальной оценкой	Через приближенную посредническую центральность	Отсутствует	Через устойчивость маршрутов

Источник / Source: составлено авторами / Compiled by the authors.



вычисление степени включенности ребер в устойчивые маршруты между множествами вершин. Теоретической базой здесь является вероятность включения ребра в семейство кратчайших или почти кратчайших маршрутов при всевозможных перестановках нагрузки. Алгоритм позволяет выявлять ключевые ребра без учета глобальной центральности, но не чувствителен к весам слоев и не масштабируется для крупных сетей (см. таблицу).

Сравнительный анализ подтверждает, что большинство известных подходов либо обладают узкой специализацией, либо не обеспечивают требуемого сочетания устойчивости, масштабируемости и теоретической обоснованности. Предлагаемый алгоритм объединяет преимущества стохастической оценки, структурного контроля и алгоритмической эффективности, являясь универсальным инструментом извлечения критических ребер в сложных сетевых структурах.

## ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИЛОЖЕНИЕ И ОГРАНИЧЕНИЯ

Предлагаемый алгоритм может применяться в задачах моделирования и прогнозирования распространения информации, мнений или эпидемий в сложных сетях, где важно выявление критических ребер, через которые проходит наибольшая доля маршрутов. Особенно эффективен он в многослойных структурах — например, социальных платформах, транспортных или коммуникационных сетях — где влияние одного слоя не может быть учтено без взаимосвязей с другими. Однако корректность прогноза зависит от соблюдения ряда допущений: предполагается, что динамика распространения аппроксимируется потоком по кратчайшим путям, что слои корректно агрегированы с учетом весов и что весовая структура отражает реальное влияние каналов передачи. Алгоритм менее применим в системах, где динамика имеет стохастическую или каскадную природу, с высокой долей латентных или нелокальных взаимодействий. Также эффективность может снижаться при наличии резких временных изменений или в графах с малой связностью.

## СПИСОК ИСТОЧНИКОВ / REFERENCES

1. Newman M.E.J., Girvan M. Finding and evaluating community structure in networks. *Physical Review*. 2004;E69:026113. DOI: 10.48550/arXiv.cond-mat/0308217
2. Granovetter M.S. The Strength of Weak Ties. *American Journal of Sociology*. 1973;78(6):1360–1380. URL: <https://www.jstor.org/stable/2776392>
3. Watts D.J., Strogatz S.H. Collective Dynamics of “Small-world” Networks. *Nature*. 1998;393:440–442. DOI: 10.1038/30918

## ВЫВОДЫ

Предложен новый алгоритм, объединяющий спектральный коарснинг, приближенную оценку центральности и жадное покрытие путей для выявления критических ребер в многослойных графах ( $1 - 1/e$ ). Его отличительные черты: теоретическая обоснованность (доказаны свойства связности, аппроксимации и устойчивости); вычислительная эффективность (сублинейная сложность относительно числа ребер); поддержка многослойной структуры (учет весов слоев и кросс-слойных взаимодействий).

**Проведен формальный анализ свойств алгоритма**, включающий сохранение надпороговой связности остаточного графа; контроль роста эффективного диаметра; гарантированную аппроксимацию посреднической центральности; устойчивость к структурному шуму и вариациям весов.

**Выполнено сравнение с существующими методами** (спектральное разрежение, ABRA, edge salience), показывающее преимущество по масштабируемости и поддержке многослойности; баланс между точностью, скоростью и теоретической обоснованностью; явный фокус на критические ребра с глобальной оценкой их роли.

**Определены области практического применения**: моделирование распространения информации и эпидемий; оценка структурной уязвимости социальных, транспортных и коммуникационных сетей; прогнозирование каскадных сбоях и оптимизация устойчивости.

**Выявлены ограничения модели**: предположение о распространении по кратчайшим путям; априорная агрегация слоев без учета временной динамики; сниженная эффективность в сетях с малой связностью или стохастической динамикой.

**Намечены направления будущих исследований**: обобщение на динамические и темпоральные сети; интеграция вероятностных моделей распространения; эмпирическая валидация на реальных данных различной природы.

Таким образом, разработанный алгоритм представляет собой универсальный инструмент для анализа критических связей в сложных сетевых структурах, сочетающий теоретическую строгость, вычислительную эффективность и практическую применимость.

4. Girvan M., Newman M.E.J. Community structure in social and biological networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*. 2002;99(2):7821–7826. DOI: 10.1073/pnas.122653799
5. Newman M.E.J. Modularity and community structure in networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*. 2006;103(23):8577–8582. DOI: 10.1073/pnas.0601602103
6. Kivelä M., Arenas A., Barthelemy M., Gleeson J.P., Moreno Y., Porter M.A. Multilayer networks. *Journal of Complex Networks*. 2014;2(3):203–271. DOI: 10.48550/arXiv.1309.7233; DOI: 10.1093/comnet/cnu016
7. Boccaletti S., Bianconi G., Criado R., del Genio C.I., Gómez-Gardeñes J., Romance M., Sendiña-Nadal I., Wang Z., Zanin M. The structure and dynamics of multilayer networks. *Physics Reports*. 2014;544(1):1–122. DOI: 10.1016/j.physrep.2014.07.001
8. Brandes U. A Faster Algorithm for Betweenness Centrality. *Journal of Mathematical Sociology*. 2001;25(2):163–177. DOI: 10.1080/0022250X.2001.9990249
9. Spielman D.A., Teng S.-H. Spectral sparsification of graphs. *SIAM Journal on Computing*. 2011;40(4):981–1025. DOI: 10.1137/08074489X
10. Riondato M., Upfal E. ABRA: Approximating betweenness centrality in static and dynamic graphs with Rademacher averages. Proceedings of the 22nd ACM SIGKDD Conference. 2016;1145–1154. DOI: 10.1145/2939672.2939770
11. Jin Y., Loukas A., JáJá J. Graph coarsening with preserved spectral properties. Proceedings of the 23rd International Conference on Artificial Intelligence and Statistics. 2020;4452–4462. URL: <https://proceedings.mlr.press/v108/jin20a/jin20a.pdf>
12. Watts D. J., Strogatz S.H. Collective dynamics of “small-world” networks. *Nature*. 1998;393(6684):440–442. DOI: 10.1038/3091
13. Song C., Havlin S., Makse H.A. Self-similarity of complex networks. *Nature*. 2005;433(7024):392–395. DOI: 10.1038/nature03248
14. Yassin A., Cherifi H., Seba H., Togni O. High and low similarity backbone extraction using similarity-based link prediction. *Applied Network Science*. 2025;10:22. DOI: 10.1007/s41109-025-00705-y
15. Burt R.S. Structural holes: The social structure of competition. — Cambridge, MA: Harvard Univ. Press; 1992. 313 p. URL: <https://archive.org/details/structuralholes0000burt/page/4/mode/2up>
16. Saito K., Kimura M., Motoda H. Discovering Influential Nodes for SIS Models in Social Networks. *Discovery Science*, Porto; 2009. DOI: 10.1007/978-3-642-04747-3\_24
17. De Domenico M., Solé-Ribalta A., Omodei E., Gómez S., Arenas A. Ranking in interconnected multilayer networks reveals versatile nodes. *Nature Communications*. 2015;6(1):6868. DOI: 10.1038/ncomms7868
18. Lotfi N., Requejo H.S., Rodrigues F.A., Mello M.A.R. A new centrality index designed for multilayer networks. *Methods in Ecology and Evolution*. 2023;15(1):204–213. DOI: 10.1111/2041-210X.14257
19. Leskovec J., Kleinberg J., Faloutsos C. Graph evolution: Densification and shrinking diameters. *ACM Transactions on Knowledge Discovery from Data*. 2007;1(1):2. DOI: 10.1145/1217299.1217301
20. Zhao Z., Zhang Y., Feng Z. Towards scalable spectral embedding and data visualization via spectral coarsening. ACM International Conference on Web Search and Data Mining. 2021. DOI: 10.1145/3437963.3441767
21. Chen P.Y., Hero A.O. Multilayer spectral graph clustering via convex layer aggregation. *IEEE Transactions on Signal Processing*. 2017. URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/7990044>
22. Dong X., Frossard P., Vandergheynst P. Clustering with multi-layer graphs: A spectral perspective. *IEEE Transactions on Signal Processing*. 2012. URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/6265414/>
23. Solé-Ribalta A., De Domenico M., Gómez S. Centrality rankings in multiplex networks. ACM Web Science Conference. 2014. DOI: 10.1145/2615569.2615687
24. Chakraborty T., Narayanam R. Cross-layer betweenness centrality in multiplex networks with applications. IEEE 32nd International Conference on Data Engineering (ICDE). 2016. DOI: 10.1109/ICDE.2016.7498257
25. Miller B.A., Shafi Z., Ruml W., Vorobeychik Y. Attacking shortest paths by cutting edges. Proceedings of the ACM WebConference. 2023. DOI: 10.48550/arXiv.2211.11141
26. Lu G., Xiong Y., Ding C., Wang Y. An optimal schedule for urban road network repair based on the greedy algorithm. *PLoS ONE*. 2016;11(10). DOI: 10.1371/journal.pone.0164780
27. Glantz R., Meyerhenke H., Schulz C. Tree-based coarsening and partitioning of complex networks. *ACM Journal of Experimental Algorithmics*. 2016. DOI: 10.1145/2851496
28. Bellingeri M., Cassi D. Robustness of weighted networks under node and link removal. *Physica A Statistical Mechanics and its Applications* 489. 2017;500:11–22. DOI: 10.1016/j.physa.2017.07.020



29. Loukas A., Vandergheynst P. Spectrally approximating large graphs with smaller graphs. ICML. 2018. URL: <http://proceedings.mlr.press/v80/loukas18a.html>
30. Nemhauser G., Wolsey L. Maximizing submodular set functions. *Mathematical Programming*. 1978;14(1):265–294. URL: <https://thibaut.horel.org/submodularity/papers/nemhauser1978.pdf>
31. Panayiotou G., Magnani M., Pinaud B. Current challenges in multilayer network engineering. *Applied Network Science*. 2024;9(1). DOI: 10.1007/s41109-024-00686-4
32. Ghoniem M., Melançon G. The State of the Art in Multilayer Network Visualization. *Computer Graphics Forum*. 2019;38(16). DOI: 10.1111/cgf.13610

## ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ / ABOUT THE AUTHORS

**Мария Вячеславовна Денисова** — магистрант, направление «Прикладная информатика», факультет информационных технологий и анализа больших данных, Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва, Российская Федерация; BI-разработчик, ООО «Авито Тех», Москва, Российская Федерация

**Maria V. Denisova** — Master’s student, program “Applied Informatics”, Department of Artificial Intelligence, Faculty of Information Technology and Big Data Analysis, Financial University under the Government of the Russian Federation, Moscow, Russian Federation; BI Developer, Avito Tech, LLC, Moscow, Russia  
<https://orcid.org/0009-0009-5719-1841>  
[mardeni201101@mail.ru](mailto:mardeni201101@mail.ru)

**Расул Ахматович Кочкаров** — кандидат экономических наук, доцент кафедры искусственного интеллекта факультета информационных технологий и анализа больших данных, Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва, Российская Федерация

**Rasul A. Kochkarov** — Cand. Sci (Econ.), Assoc. Prof. of the Department of Artificial Intelligence, Faculty of Information Technology and Big Data Analysis, Financial University under the Government of the Russian Federation, Moscow, Russian Federation  
<https://orcid.org/0000-0003-3186-3901>

*Автор для корреспонденции / Corresponding author:*  
[rkochkarov@fa.ru](mailto:rkochkarov@fa.ru)

### **Заявленный вклад авторов:**

**М.В. Денисова** — разработка общей концепции статьи, формализация алгоритма, написание текста.

**Р.А. Кочкаров** — научное руководство, методологическая поддержка, критический анализ результатов.

### **Authors’ declared contributions:**

**M.V. Denisova** — development of the general concept of the paper, algorithm formalisation, writing the manuscript.

**R.A. Kochkarov** — scientific supervision, methodological support.

*Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.*

*Conflicts of Interest Statement: The authors have no conflicts of interest to declare.*

*Статья поступила 19.12.2025; после рецензирования 12.01.2026; принята к публикации 26.01.2026.*

*Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.*

*The article was submitted on 19.12.2025; revised on 12.01.2026 and accepted for publication on 26.01.2026.*

*The authors read and approved the final version of the manuscript.*